

Ersatzschaltbild für die Rückwirkung der Wirbelströme in einem endlich langen Hohlzylinder auf den Stromkreis eines koaxialen zylindrischen Leiters

Seebaß, Joachim

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 25, 1975,
S.93-101



Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Ersatzschaltbild für die Rückwirkung der Wirbelströme in einem endlich langen Hohlzylinder auf den Stromkreis eines coaxialen zylindrischen Leiters

von Joachim Seebaß*

vorgelegt von Günter Lautz
(eingegangen am 1. 7. 1975)

Übersicht:

Es werden alle Größen für das Ersatzschaltbild angegeben, das die Rückwirkung der Wirbelströme in einem endlich langen Hohlzylinder, der coaxial einen zylindrischen Leiter umgibt, auf dessen Stromkreis beschreibt. Weiterhin werden Näherungswerte für die Kenngrößen des Ersatzschaltbildes angegeben für den Fall, daß das Radienverhältnis des Hohlzylinders kleiner als 2 ist.

Summary:

There are given all circuit elements for the equivalent circuit diagram that describes the back effect of eddy currents within a hollow cylinder of finite length surrounding a coaxial cylindric conductor, on the circuit of this conductor. Furthermore for the case that the ratio of the outer diameter to the inner diameter of the hollow cylinder does not exceed the value of 2 there are given approximate values for the circuit elements of the equivalent circuit diagram.

1. Einleitung

Im folgenden werden Ergebnisse mitgeteilt, die für mannigfache in der Elektrotechnik auftretende Anordnungen Gültigkeit haben. Sie werden hier dargelegt am Beispiel eines hinreichend langen, geraden Leiters mit kreisförmigem Querschnitt, der von einem zeitabhängigen Strom $I(t)$ durchflossen wird. Dieser Leiter sei coaxial umgeben (siehe Bild 1) von einem Hohlzylinder vom Innenradius a , Außenradius $b > a$, der Länge $2l$ und aus einem Material mit der magnetfeldunabhängigen Permeabilität μ und der

* aus dem Institut für Elektrophysik der TU Braunschweig

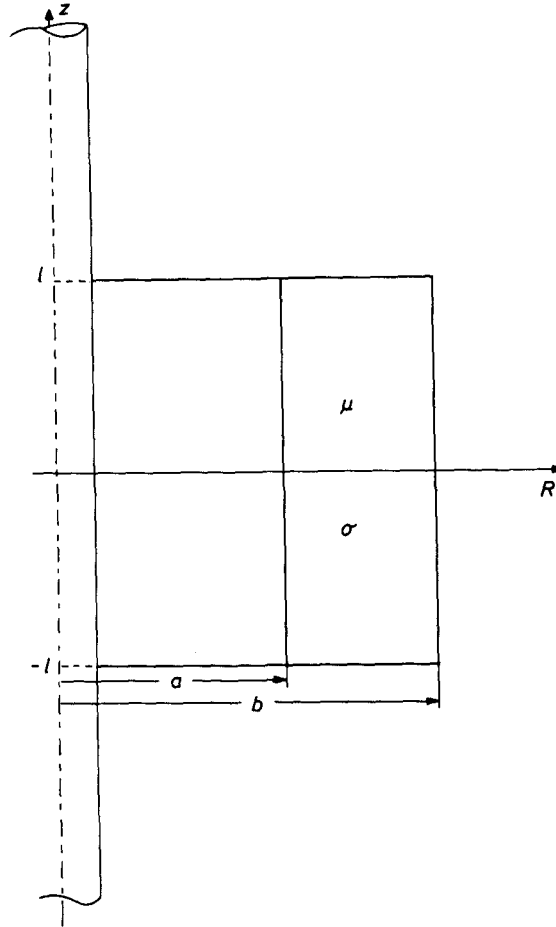


Bild 1:

Gerader, zylindrischer Leiter, koaxial umgeben von einem elektrisch leitenden Hohlzylinder

elektrischen Leitfähigkeit σ . Beschrieben werden soll die Rückwirkung der im Hohlzylinder induzierten Wirbelströme auf den Stromkreis des axialen Leiters.

Diese Anordnung entspricht der – idealisierten – Durchführung eines stromführenden Leiters durch eine leitende Wand. Die Ergebnisse können aber z. B. nach einer geringfügigen Änderung auch auf den Fall einer Ringspule mit einem verlustbehafteten Kern von rechteckigem, achsenparallelem Querschnitt übertragen werden.

In der unter [1] im Literaturverzeichnis genannten Abhandlung wurden das Magnetfeld und das Wirbelstromfeld im Hohlzylinder berechnet. Diese Feldberechnung ist die Grundlage für die folgenden Überlegungen.

2. Ersatzschaltbild für die gesamte Anordnung

Schaltkreismäßig beschreiben wir den axialen Leiter durch den ohmschen Widerstand

$$R = R(\omega), \quad (1)$$

der wegen des möglichen Auftretens von Skin-Effekt natürlich von der Kreisfrequenz ω eines aufgeprägten Wechselstromes abhängen kann, und durch die Selbstinduktivität

$$L = L^{(i)}(\omega) + L^{(a)} + L(z). \quad (2)$$

$L^{(i)}(\omega)$ ist die – gegebenenfalls wieder frequenzabhängige – innere Selbstinduktivität des axialen Leiters.

$$L(z) = \frac{\mu}{\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right) \quad (3)$$

ist der Anteil der äußeren Selbstinduktivität, der im Volumen des Hohlzylinders lokalisiert ist, und $L^{(a)}$ ist der restliche Anteil der äußeren Selbstinduktivität des axialen Leiters.

Aufgrund der Feldberechnungen in [1] lassen sich folgende Größen angeben:

1. Der magnetische Fluß durch die meridionale Querschnittsfläche des Hohlzylinders:

$$\Phi(t) = \sum_{\substack{m=1 \\ n=0}}^{\infty} M_{mn} I(t) + \sum_{\substack{m=1 \\ n=0}}^{\infty} L_{mn} I_{mn}(t). \quad (4)$$

2. Die momentane Wirbelstromverlustleistung im Hohlzylinder:

$$P_w = \sum_{\substack{m=1 \\ n=0}}^{\infty} R_{mn} I_{mn}^2(t). \quad (5)$$

3. Die magnetische Feldenergie im Hohlzylinder:

$$W_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \left[L(z) I^2(t) + 2 \sum_{\substack{m=1 \\ n=0}}^{\infty} M_{mn} I(t) I_{mn}(t) + \sum_{\substack{m=1 \\ n=0}}^{\infty} L_{mn} I_{mn}^2(t) \right]. \quad (6)$$

Die in den Formeln (4) bis (6) auftretenden Größen sind dabei in folgender Weise definiert:

Selbstinduktivitäten

$$L_{mn} = \frac{4\mu}{\pi l} \frac{1}{q_m^2 k_n^2} \frac{[Z_o(q_m b) - Z_o(q_m a)]^2}{[b^2 Z_o^2(q_m b) - a^2 Z_o^2(q_m a)]} \quad (7)$$

(Alle L_{mn} , auch die mit ungleichen Indizes, sind Selbstinduktivitätsgrößen)

Gegeninduktivitäten

$$M_{mn} = L_{mn}, \quad (8)$$

(Alle M_{mn} , auch die mit gleichen Indizes, sind Gegeninduktivitätsgrößen. Die Tatsache, daß die Gegeninduktivitäten M_{mn} mit den Selbstinduktivitäten L_{mn} übereinstimmen, ist letztlich darin begründet, daß für sämtliche Grenzflächen des Hohlzylinders jeweils nur eine Tangentialkomponente des Magnetfeldes besteht.)

Widerstände

$$R_{mn} = \frac{4}{\pi \sigma l} \frac{q_m^2 + k_n^2}{q_m^2 k_n^2} \frac{[Z_0(q_{mb}) - Z_0(q_{ma})]^2}{[b^2 Z_0^2(q_{mb}) - a^2 Z_0^2(q_{ma})]} \quad (9)$$

Die Stromgrößen $I_{mn}(t)$ sind Lösungen der Differentialgleichungen

$$\dot{I}_{mn}(t) + \frac{1}{\tau_{mn}} I_{mn}(t) = -I(t) \quad (10)$$

mit den Eigenzeitkonstanten

$$\tau_{mn} = \frac{L_{mn}}{R_{mn}} = \frac{\mu \sigma}{q_m^2 + k_n^2}. \quad (11)$$

Die Z-Funktionen sind definiert als

$$Z_p(q_m R) = Y_1(q_{ma}) J_p(q_m R) - J_1(q_{ma}) Y_p(q_m R), \quad (12)$$

wobei die J_p und Y_p die Besselschen bzw. Neumannschen Funktionen p -ter Ordnung bedeuten. Die q_m ergeben sich aus den Nullstellen der transzendenten Gleichung

$$Z_1(q_{mb}) = 0. \quad (13)$$

Es gibt abzählbar unendlich viele Werte q_m mit $m = 1, 2, 3, \dots$, die mit der Laufzahl m monoton wachsen. Die k_n sind gegeben durch

$$k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l} \text{ mit } n = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Weiterhin läßt sich zeigen, daß die folgende Beziehung gilt:

$$\sum_{\substack{m=1 \\ n=0}}^{\infty} L_{mn} = \sum_{\substack{m=1 \\ n=0}}^{\infty} M_{mn} = \frac{\mu}{\pi} l \ln\left(\frac{b}{a}\right) = L(z). \quad (15)$$

Aus den Gleichungen (4) bis (6) gewinnt man nun unmittelbar die Aussage, daß der verlustbehaftete Hohlzylinder gleichwertig ist einer zweifach unendlichen Schar von Stromkreisen mit folgenden Eigenschaften: Jeder Stromkreis – gekennzeichnet durch ein Indexpaar mn – enthält in Reihe geschaltet eine Selbstinduktivität L_{mn} und einen Widerstand R_{mn} und ist über die Gegeninduktivität M_{mn} mit dem axialen Leiter gekoppelt. Weiterhin ist jedem Stromkreis die Eigenzeitkonstante τ_{mn} zuzuordnen. Damit folgt aber für die gesamte Anordnung das in Bild 2 dargestellte Ersatzschaltbild.

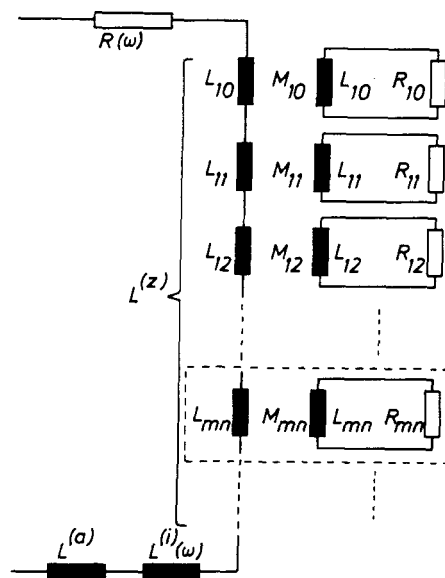


Bild 2:
Ersatzschaltbild für die Anordnung von Bild 1

Die Grundstruktur dieses Ersatzschaltbildes läßt sich natürlich schon aus allgemeinen Betrachtungen herleiten. Eine genaue Aussage über die einzelnen Schaltelemente des Ersatzschaltbildes ist aber nur nach einer vollständigen Feldberechnung, wie sie in [1] durchgeführt wurde, möglich. (Siehe auch [3].)

3. Vereinfachtes Ersatzschaltbild

In Bild 2 wurde der Selbstinduktivitätsanteil $L(z)$ des axialen Leiters gemäß Gl. (15) zerlegt eingezeichnet. Aufgrund dieser Zerlegung sieht man, daß das Ersatzschaltbild aus einer zweifach unendlichen Schar von idealen Transformatoren besteht, die primärseitig in Reihe geschaltet sind und sekundärseitig jeweils durch den Widerstand R_{mn} abgeschlossen werden. (Ein solcher idealer Transformator mit seinem sekundärseitigen Abschlußwiderstand ist in Bild 2 durch eine gestrichelte Umrandung hervorgehoben.) Aus dieser Tatsache läßt sich nun das in Bild 3 dargestellte vereinfachte Ersatzschaltbild herleiten. Danach ergibt sich die Impedanz des axialen Leiters als

$$\tilde{Z} = R(\omega) + j\omega(L^{(a)} + L^{(i)}(\omega)) + \sum_{\substack{m=1 \\ n=0}}^{\infty} \left(\frac{(\omega\tau_{mn})^2 R_{mn}}{1 + (\omega\tau_{mn})^2} + j\omega \frac{L_{mn}}{1 + (\omega\tau_{mn})^2} \right). \quad (16)$$

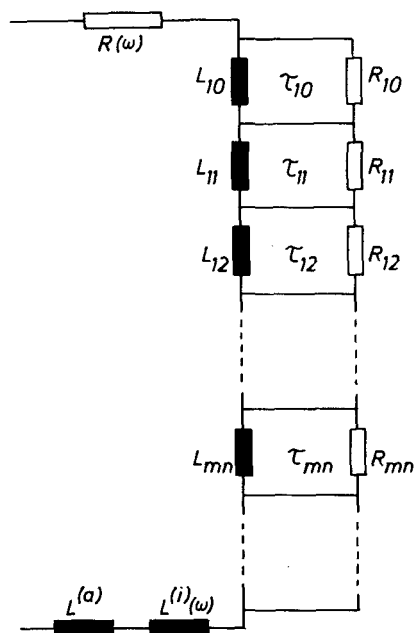


Bild 3:
Vereinfachtes Ersatzschaltbild

4. Ringspule mit verlustbehaftetem Kern

Um die hergeleiteten Ergebnisse auf den Fall einer gleichmäßig mit w Windungen bewickelten Ringspule mit verlustbehaftetem Kern zu übertragen, bedarf es nur folgender Beziehungen:

$$L^{(a)} \approx 0. \quad (17)$$

Gleichung (8) ist zu ersetzen durch

$$M_{mn} = w L_{mn}, \quad (18)$$

und Gleichung (15) ist zu ersetzen durch

$$L(z) = w^2 \frac{\mu}{\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right) = w^2 \sum_{\substack{m=1 \\ n=0}}^{\infty} L_{mn}. \quad (19)$$

Das Ersatzschaltbild für die verlustbehaftete Ringspule erhält man aus Bild 3, indem man den Induktivitätsanteil $L^{(a)}$ vernachlässigt und die Größen L_{mn} und R_{mn} durch $w^2 L_{mn}$ und $w^2 R_{mn}$ ersetzt. Die Impedanz für eine solche Spule ergibt sich damit zu

$$\tilde{Z} = R(\omega) + j\omega L^{(i)}(\omega) + w^2 \sum_{\substack{m=1 \\ n=0}}^{\infty} \left(\frac{(\omega \tau_{mn})^2 R_{mn}}{1 + (\omega \tau_{mn})^2} + j\omega \frac{L_{mn}}{1 + (\omega \tau_{mn})^2} \right). \quad (20)$$

5. Näherungswerte bei begrenztem Radienverhältnis

Wenn das Radienverhältnis des Hohlzylinders die Bedingung

$$1 < b/a \leq 2 \quad (21)$$

erfüllt, kann man wesentlich vereinfachte Näherungswerte für die Größen L_{mn} und R_{mn} angeben. Wie in [2] gezeigt wurde, gilt für diesen Fall in guter Näherung

$$q_m = \frac{m\pi}{b-a}. \quad (22)$$

Setzt man außerdem für die auftretenden Zylinderfunktionen die asymptotischen Darstellungen für große Argumentwerte ein, so erhält man

$$L_{mn} = \frac{16\mu}{\pi^5} \frac{l(b-a)}{ab} \frac{[a+b - (-1)^m 2\sqrt{ab}]}{m^2 (2n+1)^2}, \quad (23)$$

$$R_{mn} = \frac{16}{\pi^5 \sigma} \frac{l(b-a)}{ab} \left(\frac{m^2 \pi^2}{(b-a)^2} + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4 l^2} \right) \frac{[a+b - (-1)^m 2\sqrt{ab}]}{m^2 (2n+1)^2} \quad (24)$$

und

$$\tau_{mn} = \frac{\mu \sigma}{\left[\frac{m^2 \pi^2}{(b-a)^2} + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4 l^2} \right]} \quad (25)$$

Für die Summenausdrücke in (16) und (20) führen wir nun ein

$$\Delta R = \sum_{\substack{m=1 \\ n=0}}^{\infty} \frac{(\omega \tau_{mn})^2 R_{mn}}{1 + (\omega \tau_{mn})^2} \quad (26)$$

und

$$\Delta L = \sum_{\substack{m=1 \\ n=0}}^{\infty} \frac{L_{mn}}{1 + (\omega \tau_{mn})^2}. \quad (27)$$

Setzt man hier die Näherungswerte (23) bis (25) ein, so lassen sich die Summationen in den Grenzfällen schwachen und starken Skin-Effektes ausführen. Bezüglich mathematischer Einzelheiten dazu sei auf die Abhandlung [2] verwiesen. In den folgenden Formeln bedeutet

$$\delta = \sqrt{2/(\omega \mu \sigma)} \quad (28)$$

die äquivalente Leitschichtdicke und

$$u = 2 \left(2l + (b-a) \right) \quad (29)$$

den Querschnittsumfang des Hohlzylinders.

Im Grenzfall schwachen Skin-Effektes ($\delta \gg 2l$, $b-a$) erhält man für $l > (b-a)$:

$$\Delta R = \frac{1,415 \cdot 10^{-2}}{\sigma a} \frac{2l(b-a)^3}{\delta^4} \left\{ \frac{a+b}{b} \left[1 - 0,610 \left(\frac{b-a}{2l} \right) \right] + 1,75 \sqrt{\frac{a}{b}} \left[1 - 0,653 \left(\frac{b-a}{2l} \right) \right] \right\} \quad (30)$$

$$\Delta L = \frac{\mu}{\pi} l \ln(b/a) \left\{ 1 - \frac{8,013 \cdot 10^{-3}}{\ln(b/a)} \frac{b-a}{a} \left(\frac{b-a}{\delta} \right)^4 \left[\frac{a+b}{b} \left[\left(\frac{b-a}{2l} \right) - 2,077 \exp \left(-\pi \frac{2l}{b-a} \right) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + 1,969 \sqrt{\frac{a}{b}} \left[\left(\frac{b-a}{2l} \right) - 2,110 \exp \left(-\pi \frac{2l}{b-a} \right) \right] \right] \right\} \quad (31)$$

und für $(b-a) > 2l$:

$$\Delta R = \frac{1,768 \cdot 10^{-2}}{\sigma a} \frac{(2l)^3(b-a)}{\delta^4} \left\{ \frac{a+b}{b} \left[1 - 0,954 \left(\frac{2l}{b-a} \right) + 0,3 \left(\frac{2l}{b-a} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{a}{b}} \left[1 + 3,764 \left(\frac{2l}{b-a} \right) \exp \left(-\pi \frac{b-a}{2l} \right) - 0,6 \left(\frac{2l}{b-a} \right)^2 \right] \right\}, \quad (32)$$

$$\Delta L = \frac{\mu}{\pi} l \ln(b/a) \left\{ 1 - \frac{1,111 \cdot 10^{-2}}{\ln(b/a)} \frac{b-a}{a} \left(\frac{2l}{\delta} \right)^4 \left[\frac{a+b}{b} \left[1 - 1,431 \left(\frac{2l}{b-a} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + 0,607 \left(\frac{2l}{b-a} \right)^2 - 5,991 \exp \left(-2\pi \frac{b-a}{2l} \right) \right] + \sqrt{\frac{a}{b}} \left[1 - 1,214 \left(\frac{2l}{b-a} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 5,991 \left(1 + 0,955 \left(\frac{2l}{b-a} \right) \right) \exp \left(-\pi \frac{b-a}{2l} \right) \right] \right] \right\} \quad (33)$$

Im Grenzfall starken Skin-Effektes ($\delta \ll 2l$, $b-a$) ergibt sich:

$$\Delta R = \frac{3,225 \cdot 10^{-2}}{\sigma a} \frac{u}{\delta} \left\{ \left(1 + \sqrt{\frac{a}{b}} \right)^2 \left[1 - 4 \frac{\delta}{u} \left(\pi + \left(\frac{b-a}{2l} \right) + \left(\frac{2l}{b-a} \right) \right) \right] - \right. \\ \left. - 2 \sqrt{\frac{a}{b}} \left[1 + 4 \frac{l}{u} - 4 \frac{\delta}{u} \left(\pi + \frac{1}{2} \left(\frac{b-a}{2l} \right) + 2 \left(\frac{2l}{b-a} \right) \right) \right] \right\} \quad (34)$$

und

$$\Delta L = 6,450 \cdot 10^{-2} \mu l \left(\frac{\delta}{a} \right) \left[\frac{a+b}{b} \left(1 + \left(\frac{b-a}{2l} \right) \right) + \sqrt{\frac{a}{b}} \left(\frac{b-a}{2l} \right) \right]. \quad (35)$$

6. Schlußbemerkung

Ausgehend von der in [1] durchgeführten Berechnung des elektromagnetischen Feldes einer in der Praxis häufig vorkommenden Anordnung wurde hier das Ersatzschaltbild für die Anordnung entwickelt, aus dem der Praktiker sofort Aussagen über ihr quasistationäres Verhalten gewinnen kann. Für alle konzentrierten Schaltelemente des Ersatzschaltbildes wurden sowohl die exakten Ausdrücke als auch Näherungswerte angegeben. Damit gibt die vorstehende Abhandlung ein gutes Beispiel für die letztlich doch enge Verknüpfung zwischen theoretischer und praktischer Elektrotechnik.

Literatur

- [1] *Seebaß, J.*, Ein Beitrag zur Theorie der Wirbelströme in ringförmigen Bereichen mit rechteckigem, achsenparallelem Querschnitt. Arch. f. Elektrotechn., Bd. 56 (1974), S. 285–292.
- [2] *Seebaß, J.*, Näherungsweise Berechnung des Wirbelstromverhaltens endlich langer Hohlzylinder mit begrenztem Radienverhältnis. Arch. f. Elektrotechn., Bd. 57 (1975), S. 85–92.
- [3] *Silvester, P.*, Eddy-current modes in linear solid-iron bars. Proc. Instn. elect. Engrs., Vol. 112 (1965), S. 1589–1594.